## 26 Применение теоремы Шаудера для решения краевых задач для одного нелинейного дифференциального уравнения и для решения одного нелинейного интегрального уравнения

1) $\begin{cases} x^{(3)} - x'' x^2 = 0,\ t \in (0,1), \\ x(0) = a,\ x'(0) = b,\ x''(1) = c \end{cases}$

$\frac{x^{(3)}}{x''} = x^2 \Rightarrow x''(t) = A e^{\int_0^t x^2(\tau)d\tau} \Rightarrow \{x''(1) = c\} \Leftrightarrow$

$\int_0^t \frac{x^{(3)}(\tau)}{x''(\tau)} d\tau = \int_0^t \frac{d(x''(\tau))}{x''(\tau)} = \ln|x''(t)| - \underbrace{\ln|x''(0)|}_{\text{в const-ту } A}$

$\Rightarrow c = A e^{\int_0^1 x^2(\tau)d\tau} \Rightarrow A = \frac{c}{\int_0^1 x^2(\tau)d\tau} \Rightarrow x(t) = a + bt +$

$+ c \frac{\int_0^t d\tau \int_0^\tau d\xi\, e^{\int_0^\eta x^2(\eta)d\eta}}{e^{\int_0^1 x^2(\eta)d\eta}}$

Пусть находимся в пр-ве $C[0,1]$, $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$

Пусть $\Omega$ — шар $\overline{B}(0,R)$, $R = |a| + |b| + \frac{1}{2}|c|$

Рассмотрим $A(x) = a + bt + c \cdot \frac{\int_0^t d\tau \int_0^\tau d\xi\, e^{\int_0^\eta x^2(\eta)d\eta}}{e^{\int_0^1 x^2(\eta)d\eta}}$ — нелин. оп-р

$A$ переводит непр. ф-цию в непр $\xrightarrow{} C[0,1]$ $\Rightarrow A$ — непр.

$|A(x)| \le |a| + |b| + |c| \cdot \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^1 \le |a| + |b| + \frac{|c|}{2} \Rightarrow A: \overline{B}(0,R) \to \overline{B}(0,R)$

Компакт. ли $A$? (по Т Арцела)

Пусть $y_n = A(x_n)$; $A$ — равномер. огр. (см. выше)

$\left.\begin{array}{l} |y_n(t+\Delta) - y_n(t)| \le |b|\Delta + |c| \int_t^{t+\Delta} d\tau \int_0^1 d\xi = |b|\Delta + |c|\Delta < \varepsilon \\ \forall \Delta < \delta\ \ \forall n \Rightarrow \text{есть равностеп. непр-ть} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ {Т Арцела} $\Rightarrow A$ переводит огр. мн-во в предкомп. $\Rightarrow A$ компакт.

$\left.\begin{array}{l} A \text{ — непр. и компакт} \Rightarrow A \text{ — вполне непр.} \\ \Omega = \overline{B}(0,R) \text{ — замкн., вып., огр.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ {Т Шаудера} $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in \overline{B}(0,R): x(t) = Ax \Rightarrow$ у исход. зад. есть реш-е (т.е. $x(t)$ 3 раза непр. дифф. и удовл. кр. усл-м)

2) $x(t) = \int_0^1 K(t,\tau)\, x^{2n+1}(\tau) d\tau + f(t)$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$

$X = C[0,1] \Rightarrow \|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$; $K(t,\tau) \in C([0,1]\times[0,1])$; $|K(t,\tau)| \le K_0$ — огр., $f(t) \in C[0,1]$

$Ax = \int_0^1 K(t,\tau) x^{2n+1}(\tau) d\tau$; $A$ переводит непр. ф-цию в непр. (как $\int$ с параметром) $\Rightarrow A$ — непр.

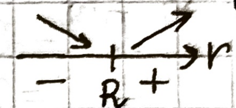
Возьмем $|x(t)| \le r \Rightarrow |A(x)| \le K_0 r^{2n+1} + \|f\|_C$; нужно треб-ть чтобы: $K_0 r^{2n+1} + \|f\|_C \le r$. $\exists$ ли такое $r$?

$\forall\ \psi(r) = K_0 r^{2n+1} + \|f\|_C - r,\ r \ge 0$.

$\psi'(r) = K_0 (2n+1) r^{2n} - 1 \Rightarrow \psi'(R) = 0$, где $R = \left(\frac{1}{K_0(2n+1)}\right)^{1/2n}$ — т. extr

В т. $R$ у $\psi$ — min. Потребуем, чтобы $\psi(R) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r: \psi(r) = 0$.



$K_0 R^{2n+1} + \|f\|_C - R \le 0 \Rightarrow$ {подстановка $R$} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{(2n+1)K_0}\right)^{1/2n} \cdot \frac{1}{2n+1} + \|f\|_C - \left(\frac{1}{K_0(2n+1)}\right)^{1/2n} = \frac{-2n}{2n+1}\left(\frac{1}{K_0(2n+1)}\right)^{1/2n} + \|f\|_C \le 0$$

$\Rightarrow$ if $\|f\|_C \le \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{1}{K_0(2n+1)}\right)^{1/2n} \Rightarrow \min \psi(r) \le 0 \Rightarrow$ у ф-ции есть 2 нуля ($\psi(0) > 0$) $\Rightarrow \exists r_* < r^*,\ \psi(r_*) = \psi(r^*) = 0$

Если взять $\overline{B}(0, r^*)$, то $A(x): \overline{B}(0, r^*) \to \overline{B}(0, r^*)$

Компакт-ть $A(x) \Rightarrow$ из Т Арцела ($|y_k(t+\Delta) - y_k(t)| \le$ $\le |\int_0^1 [K(t+\Delta, \tau) - K(t, \tau)]\, x^{2n+1}(\tau)\, d\tau| + |f(t+\Delta) - f(t)| \ldots < \varepsilon$, в силу непр-ти $K$ и $f$)

$\left.\begin{array}{l} A \text{ — компакт. и непр} \Rightarrow A \text{ — вполне непр.} \\ D = \overline{B}(0, r^*) \text{ — замкн., вып., огр.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ {Т Шаудера}

$\Rightarrow \exists\, x \in \overline{B}(0, r^*): A(x) = x \Rightarrow$ у исход. зад. есть реш-е

//! — who? I don't know her//